2) a) la fonction $x \to e^{-x}$ est dérivable sur IR ,

La fonction $x \to 1+e^{x}$ est dérivable et

strictement positive sur IR donc $x \to \ln(1+e^{x})$

est dérivable sur IR et

par suite f est dérivable

sur IR (produit de deux fonctions dérivables)

$$f'(x) = -e^{-x}\,\mathrm{Ln}(1+e^{x}) + e^{-x}\,\frac{e^{x}}{1+e^{x}}$$

$$f'(x) = e^{-x}\left[\mathrm{Ln}(1+e^{x}) - \frac{e^{x}}{1+e^{x}}\right]$$

b) on a : $f'(x) = e^{-x}\,g(e^{x})$

pour $\boxed{t = e^{x}} \in [0, +\infty[$, on a $g(t) \le 0$

donc $f'(x) \le 0$ d'où f est strictement décroissante sur IR

3) a) $f(x) = e^{-x}\mathrm{Ln}(1+e^{x}) = e^{-x}\mathrm{Ln}[e^{x}(1+e^{-x})]$

$$= e^{-x}[\mathrm{Ln}\,e^{x} + \ln(1+e^{-x})]$$

$$= e^{-x}[x + \ln(1+e^{-x})]$$

$$= x\,e^{-x} + e^{-x}\ln(1+e^{-x})$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x}} + e^{-x}\ln(1+e^{-x}) = 0$

c)) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x\,e^{-x} + e^{-x}\ln(1+e^{-x})$

on pose $X = e^{-x}$ donc $x = -\mathrm{Ln}X$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{X \to +\infty} [-x\mathrm{Ln}X + X\ln(1+X)]$$

$$= \lim_{X \to -\infty} X[-\mathrm{Ln}X + \ln(1+X)]$$

$$= \lim_{X \to -\infty} X\left[\ln\left(\frac{1+X}{X}\right)\right]$$

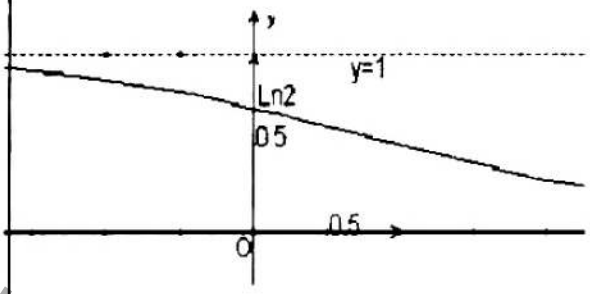
$$= \lim_{X \to +\infty} X\left[\ln\left(\frac{1+X}{X}\right)\right] = \lim_{X \to +\infty} X\left[\ln\left(1+\frac{1}{X}\right)\right]$$

On pose $t = \frac{1}{X}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

4)

t	$-\infty$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	1	↘	0



Partie B

$$\begin{cases} U_0 = 0{,}5 \\ U_{n+1} = f(U_n) \quad . \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) a) $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$

On pose $\varphi(x) = f(x) - x$

$\varphi'(x) = f'(x) - 1 < 0$ car $f'(x) \le 0$

φ est continue est strictement décroissante sur IR

$\Rightarrow \varphi$ réalise une bijection de IR sur IR

comme $0 \in \varphi(\mathrm{IR})$ alors il existe un unique

réel α tel que $\varphi(\alpha) = 0$

$\varphi(0{,}5).\,\varphi(0{,}6) < 0 \Rightarrow 0{,}5 \le \alpha \le 0{,}6$

Qarray.tn - Agra Blech- Qarray.tn